DUILIO GIGLI

Definizioni in Matematica

Estratto dall' ANNUARIO
del R. Liceo Ginnasio " Ugo Foscolo „ di Pavia
Vol. IV, 1926-27



PAVIA
ISTITUTO PAVESE DI ARTI GRAFICHE
1928 - Anno VI.



F. ENRIQUES trattò l' anno scorso in una conferenza a Trieste, riprodotta in uno scritto pubblicato dal *Periodico di Matematica* (1), del- *La definizione come problema scientifico.* Questo scritto è il più recente che io abbia letto fra i molti che discutono del definire in Matematica (2).

Vi è dunque in Matematica un problema della definizione? E, precisamente, v' è forse un problema della definizione, per il quale si debba concedere che si hanno questioni dove i matematici davvero non sanno di che cosa parlano? No: questo non accade mai.

E' lo studio, di fare rientrare le elaborazioni del pensiero in quadri prestabiliti, che crea la questione, la quale viene ad essere per buona parte una questione di parole. In sostanza si ha solo da fare una classificazione di quelle elaborazioni.

---

(1) Serie IV, t. 7 (1927) p. 73. Vedi anche p. 208-209.

(2) F. ENRIQUES tratta della definizione nei suoi *Problemi della Scienza* (Bologna, 1906), cap. III, nelle *Questioni riguardanti le Matematiche elementari* I (Bologna, 1924), *I numeri reali*, par.fi 8,9, e molto diffusamente nel suo libro *Per la Storia della Logica* (Bologna, 1922).

Trattano lo stesso argomento scritti di

E. MACCAFERRI, *Le definizioni per astrazione e la classe di* RUSSELL, Rend. del Circ. Mat. Palermo, t. 25 (1913), p. 165;

— —, *Sulle definizioni di enti astratti e sul concetto di numero reale*, Period. Mat., s. III, t. 12 (1915), p. 87;

G. PEANO, *Definitione de numeros reale secundo* EUCLIDE, Boll. Mathesis t. 7 (1915), p. 31;

— —, *Le definizioni per astrazione*, ibidem, p. 106;

S. CATANIA, *Sui concetti di definizione e di eguaglianza*, Boll. Mathesis, t. 8 (1916), p. 54;

A. NATUCCI, *Le definizioni matematiche e il concetto di uguaglianza*, Period. Mat., s. III, t. 13 (1916), p. 220;

S. CATANIA, *Lunghezze, aree, volumi*, Period. Mat., s. III, t. 14 (1917), p. 21;

G. PEANO, *Le definizioni in Matematica*, Period. Mat., s. IV, t. 1 (1921), p. 175.

Alcuni di questi scritti contengono copiose citazioni di altri scritti sull' argomento. Se ne hanno diversi di C. BURALI-FORTI, che possiamo considerare riassunti nella sua *Logica matematica* (Milano, 1919).



Se prendiamo a considerare gli esempi di definizioni che si adducono negli scritti ricordati, troviamo che sono sempre gli stessi, e non sono numerosi.

Sono le definizioni di *numero* (razionale, o reale, o relativo, etc.), e in particolare quelle di *lunghezza*, di *area*, di *volume;* sono la definizione di *direzione*, la definizione di *vettore* e poche altre.

Si vogliono scansare, come logicamente imperfette, le *definizioni per astrazione* ([3]); e le definizioni nominali, che si propongono in vece di quelle, definiscono qualche cosa di diverso da quello che si voleva o non definiscono niente.

Le definizioni nominali del numero naturale di A. N. WHITEHEAD e B. RUSSELL, del numero razionale di A. PADOA, etc., delle quali già dissi nelle mie *Riflessioni sui principii dell'Aritmetica*, pubblicate l'anno scorso in questo stesso *Annuario*, dànno nome di numero a classi (di classi di enti qualisivogliano, di coppie proporzionali di numeri interi); e sentiamo che un numero non è una classe di classi.

C. BURALI-FORTI ([4]), respingendo così siffatte *definizioni per classi* come quelle per astrazione, definisce, p. es., i numeri reali come *operatori*, fra grandezze d' una classe di grandezze omogenee, soddisfacenti a certe condizioni. E, un operatore, che cosa è? « Noi possiamo considerare, egli dice, « la classe formata da tutti i

— simboli, semplici o composti, f tali che la notazione

$$f\,x, \text{ ovvero } x\,f,$$

ottenuta scrivendo f a sinistra o a destra di un conveniente x, e senza che fra f ed x si interponga altro simbolo, abbia significato —.

([3]) Non trovo chi abbia usato per primo questa denominazione: « definizione per astrazione », in sè non chiara. Per renderla chiara occorre modificarla così: « definizione che prelude all' affermazione d' un concetto », come sopra si dirà.

([4]) *Logica matematica* ([2]), p. 388, p. 110.

« Questa classe la indicheremo col simbolo Ω, abbreviazione di *operatore* ».

Dunque i numeri reali sono segni aventi significato! E quali segni? Quelli che adotto io o quelli che può adottare chicchesia altro? Sono parole italiane o parole d'altra lingua?

Mi pare che sia illudersi il ritenere d'avere in tal guisa raggiunta la definizione nominale della classe dei numeri reali. E mi pare che lo stesso, per lo meno, sia da dirsi nei rispetti della definizione nominale di vettore, data pure da C. BURALI-FORTI (5) e già discussa da F. ENRIQUES (6).



Si hanno dunque dei tentativi, di definizione nominale, non riusciti; e ciò avviene perchè si hanno un *concetto* di numero, un *concetto* di vettore. Si hanno cioè un' infinità di rappresentazioni, quella delle classi (finite) o delle grandezze di data specie, un'altra infinità di rappresentazioni, quella delle grandezze, di una stessa specie, aventi verso; e la nostra mente, nella considerazione dell'una o dell'altra, interviene per discernervi classi, la classe delle classi, o grandezze, equivalenti ad una data o la classe delle grandezze equipollenti ad una data, e quindi per astrarre, o estrarre, dagli enti della classe la nota comune e perciò semplice, indecomponibile; e ciò è il *concetto*.

E quando si ha concezione, nel senso così determinato, non v'è luogo a definizione. Un concetto si porge descrivendo le rappresentazioni dalle quali ha origine; e in una descrizione siffatta non si ha da fare questione di logica, ma solo di arte di chi espone, nella scelta e nella coloritura delle immagini.

---

(5) C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Elementi di Calcolo vettoriale* (Bologna, 1921), P. 1ª, cap. I.

(6) *Noterelle di Logica matematica*, Period. Mat., s. IV, t. 1, p. 233; *Polemica logico-matematica*, ibidem, p. 354.



Una scienza non si esaurisce nell' affermazione e nella contemplazione di uno o di alquanti concetti. Essa sorge per soddisfare esigenze pratiche e non vive e non si sviluppa se non opera. I materiali coi quali essa costruisce sono, per usare designazioni di B. Croce (7), gli *pseudo-concetti,* le *finzioni concettuali.*

L' Analisi matematica, nella quale tutta campeggia il concetto di *numero* (8), fa uso di questo mediante l' enunciazione di proposizioni fondamentali, che determinano quanto vi ha di elementare nell' associarsi e nel differenziarsi, nella nostra mente, delle rappresentazioni che sottostanno a quel concetto.

Sono, precisamente, ravvisati con quelle proposizioni fondamentali la *funzione elementare,* di due variabili x e y:

$$x + y,$$

e il *criterio elementare di classificazione*:

$$x > y, \qquad x = y, \qquad x < y.$$

E *tutta l' Analisi matematica costruisce funzioni, in modi ben svariati, e classifica.*

Similmente la Geometria, muovendo da quelle finzioni concettuali che sono il *punto,* la *retta* e il *piano* (9), associa punti e rette e piani, e *costruisce figure,* e le classifica, e le trasforma, pure nei modi più varii.

E in questa attività — associativa, costruttiva, classifitoria — è il campo della definizione, la quale riesce sempre naturalmente — comodamente, diciamo — definizione nominale.

---

(7) *Logica come scienza del concetto puro* (Bari, 1920).

(8) B. Croce non riconosce dignità di concetto puro neppure al concetto di numero naturale; questo rimarrebbe uno pseudoconcetto empirico; ma davvero « nella realtà non vi ha alcuna cosa che possa fungere da caposerie, e nessuna cosa è distaccabile dall' altra, per modo da generare una serie discontinua »? (*Logica* etc. (7), pag. 236).

(9) Scrive B. Croce (l. cit.): « ... la realtà non offre uno spazio, ..., sibbene la spazialità... »; ma questa non serve a nulla. Non si deve aver difficoltà a concedere che la Geometria sia fatta con quegli spregiati materiali che sono gli pseudoconcetti astratti. Anche le più mirabili sculture son fatte di sasso o di ignobile metallo, ed anche le armonie più elevate e più delicate si producono dal grossolano vibrare di lamine e di corde.



E' da notare che la veduta, della quale ora si è detto, è del caposcuola stesso dei Logici matematici in Italia. G. Peano, nella 3ª edizione del suo *Formulaire de Mathématiques,* scriveva (pag. 7):

« .... *une idée, qui n' a pas de définition possible,* relativement à un ordre fixé, s' appelle « idée primitive » relativement à cet ordre. Il convient de donner aux idées d'une science un ordre tel que le nombre des idées primitives soit le plus petit. *Les idées primitives sont ici expliquées par le langage ordinaire, et sont determinées par des Pp* (propositions primitives); celles-ci jouent le rôle de définitions par rapport aux idées primitives, mais n' en ont pas la forme ».

E già nel 1899 lo stesso Autore aveva scritto (10): « Una definizione nominale (del numero reale) non si può dare altrimenti che identificando i numeri reali coi segmenti di razionali, e costruendo quindi sui primi una nomenclatura diversa da quella già usata sui secondi ».



Tornando infine allo scritto di F. Enriques, citato in principio, mi pare ben vero che la definizione logica sia soltanto definizione di nome, e che suo officio sia quello di suggellare un processo costruttivo della mente. Ma non direi che con essa si risolva « un concetto in concetti più semplici, che si presumono dati », per riserbare alla parola concetto il significato che sopra è indicato. Io distinguo da tempo nel mio insegnamento *concetti* e *nozioni;* e parlo, p. es., di *concetto* di *numero* e di *nozione* di *funzione,* di *simiglianza delle figure,* etc. Una definizione fa conoscere come una nozione nuova si derivi da nozioni date prima.

Nelle costruzioni matematiche la nostra mente può

---

(10) *Sui numeri irrazionali,* Rev. Math., t. 6 (1899), p. 126.

assurgere e non assurgere a concetti nuovi. Osservo che si cita sempre la famosa 5ª def. del libro V° degli *Elementi* come tipo delle definizioni per astrazione. Nel fatto essa è una correttissima definizione nominale di coppie di grandezze proporzionali (11). EUCLIDE non salì dalla considerazione della proporzionalità alla concezione del numero reale. Per giungere a questa, e così riuscire a fare quell' economia di pensiero che essa ci consente, ci volle tutto il Rinascimento (12).

Si definiscono in Geometria il triangolo equilatero, il triangolo isoscele, etc.; ma non appare necessario pervenire ad un *concetto* della *triangolo-equilateralità* o del *triangolo-isoscelismo*.

La Geometria elementare fa a meno del concetto di *direzione,* che è ben posto, ai fini dell'economia di pensiero, dalla Geometria projettiva.

E quanto ai concetti di *forma* e di *estensione*, si può anche convenire che essi preesistano alle finzioni concettuali della Geometria. Ma questa non muove da quei concetti, per derivarne per interferenza quello della *congruenza* delle figure; il cammino della Geometria si compie in senso inverso, ancora per trarre utilità dallo studio delle rappresentazioni, nelle quali i concetti stessi hanno origine.

Si concede così che il cammino delle Matematiche sia diretto a fini pratici, come è ripetuto da B. CROCE. Le Matematiche lavorano; ed in questo — anzi, anche in questo — sta la loro nobiltà.

Pavia, aprile 1928.

DUILIO GIGLI.

---

(11) C. BURALI-FORTI (*Logica matem.* (2), p. 402) cambia « la forma *astratta* (di questa definizione) (già riconosciuta inesatta ....) in forma concreta logicamente precisa », così: « Rag. $(x ; y)$, « ragione di $(x ; y)$ » è la classe formata dalle coppie $(a ; b)$ di grandezze omogenee tali che, se m, n sono equimultiple di x ed a e p, q sono equimultiple di y e b, allora: se m è eguale o minore o maggiore di p, sempre si ha che n è eguale o minore o maggiore, rispettivamente, di q. » Ma non si ha qui, per caso, una di quelle « non consigliate » definizioni per classi?

(12) Vedi M. T. ZAPELLONI, *Il concetto di rapporto nel V libro dell'* EUCLIDE, Period. Mat., s. IV, t. 7 (1927), p. 86.